Elementarna matematika 2

Rješenja zadataka s vježbi
Osmi tjedan

Zadatak 1. Dana je točka $C = (2, 4)$ u ravnini. Točkom C prolaze dva okomita pravca. Prvi siječe x-os u točki A, a drugi siječe y-os u točki B. Odredite geometrijsko mjesto polovišta dužina $\overline{AB}$, kako pravci rotiraju oko točke C, ostajući međusobno okomiti.

Rješenje. Općeniti pravac p kroz točku $(2, 4)$ je oblika $y - 4 = k(x - 2)$. Pravac q okomit tom pravcu koji također prolazi kroz ovu točku je $y - 4 = \frac{-1}{k}(x - 2)$.

Jedini par pravaca koji smo ovdje propustili je kad su p i q horizontalni, odnosno vertikalni pravci. Tada je polovište od $\overline{AB}$ jednako $(1, 2)$.

Pravac p siječe x-os u točki $A = (x, 0)$, gdje je x takav da je $-4 = k(x - 2)$, odnosno $x = 2 - \frac{4}{k}$.

Pravac q siječe y-os u točki $B = (0, y)$, gdje je y takav da je $y - 4 = \frac{2}{k}$, odnosno $y = 4 + \frac{2}{k}$.

Polovište dužine $\overline{AB}$ ima koordinate $\frac{A+B}{2} = \left(1 - \frac{2}{k}, 2 + \frac{1}{k}\right)$.

Sada treba geometrijski interpretirati skup točaka $\left\{(1 - \frac{2}{k}, 2 + \frac{1}{k})\right\}$. Uz supstituciju $t = 1 - \frac{2}{k}$, $t \neq 1$, dobivamo $2 + \frac{1}{k} = \frac{-t}{2} + \frac{5}{2}$. Za $t = 1$, dobivamo upravo ranije spomenutu točku $(1, 2)$, pa je traženi skup točaka je pravac s jednadžbom

$$y = \frac{-t}{2} + \frac{5}{2}.$$

□

Zadatak 2. Odredite sijeku li se pravci koji imaju sljedeće kanonske jednadžbe:

$$\frac{x+1}{1} = \frac{y}{1} = \frac{z-1}{2},$$

$$\frac{x}{1} = \frac{y+1}{3} = \frac{z-2}{4}.$$

Rješenje. Pretvorimo jednadžbe pravca u parametarske. Nazovimo prvi pravac p, a drugi q. Onda je

$$p \ldots \begin{cases} x = t - 1, \\ y = t, \\ z = 2t + 1, \end{cases}$$

te

$$q \ldots \begin{cases} x = s, \\ y = 3s - 1, \\ z = 4s + 2. \end{cases}$$

Pravci se sijeku ako i samo ako sustav jednadžbi

$$\begin{aligned} t-1&=s\\ t&=3s-1,\\ 2t+1&=4s+2 \end{aligned}$$

ima realno rješenje (t,s). Jednostavno se metodama linearne algebre provjeri da taj sustav nema rješenja; npr. možemo s zamijeniti s $t-1$ u drugoj i trećoj jednadžbi, te vidimo da ne postoji t koji zadovoljava obje jednadžbe. $\square$

Zadatak 3. Na pravcu s kanonskom jednadžbom

$$\frac{x+2}{-1}=\frac{y+3}{-1}=\frac{z-3}{1}$$

odredite sve točke koje s točkama $A=(-2,1,1)$ i $B=(0,-7,4)$ čine pravokutan trokut.

Rješenje. Parametarski oblik pravca je $(x,y,z)=(-t-2,-t-3,t+3)$.

Neka je $C=C(t)$ točka na pravcu koja se dobije za parametar t.

Sada razlikujemo slučajeve ovisno o tome koji kut u trokutu je $90°$. Izračunajmo vektore trokuta:

$$\begin{aligned} \overrightarrow{AC}&=(-t,-t-4,t+2),\\ \overrightarrow{AB}&=(2,-8,3),\\ \overrightarrow{BC}&=(-t-2,-t+4,t-1). \end{aligned}$$

- $\angle ABC=90°$. Tada je $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BC}=0$, što daje jednadžbu

  $$2(-t-2)-8(-t+4)+3(t-1)=0,$$

  odnosno $t=\frac{-33}{9}=\frac{-11}{3}$, iz čega lako čitamo $C=\left(\frac{5}{3},\frac{2}{3},\frac{-2}{3}\right)$.

- $\angle BAC=90°$. Ovaj slučaj je potpuno analogan prvom, raspišemo $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=0$, dobijemo jednu linearnu jednadžbu s jednom nepoznanicom iz koje dobijemo jednu vrijednost t, iz koje dobijemo točku C. Dobije se $t=\frac{-38}{9}$ iz čega se lako izračuna točka C.

- $\angle ACB=90°$. Ovaj slučaj je drugačiji, jer dobijemo kvadratnu jednadžbu po t:

  $$t^2+2t+t^2-16+t^2+t-2=0,$$

  odnosno $t^2+t-6=0$, iz čega dobivamo $t=2$ i $t=-3$ kao rješenja.

$\square$

Zadatak 4. Odredite jednadžbu pravca koji prolazi kroz ishodište i siječe pravce

$$\frac{x-\frac{7}{2}}{5}=\frac{y}{3}=\frac{z-\frac{5}{2}}{1} \quad \text{i} \quad \frac{x+3}{1}=\frac{y-12}{1}=\frac{z+9}{1}.$$

Rješenje. Zapišimo parametarske jednadžbe pravaca iz zadatka. To su

$$p\ldots\begin{cases} x=5t+\frac{7}{2},\\ y=3t,\\ z=t+\frac{5}{2}, \end{cases}$$

te

$$q \dots \begin{cases} x = s - 3, \\ y = s + 12, \\ z = s - 9. \end{cases}$$

Neka je A presjek traženog pravca i p, te neka je B presjek traženog pravca i q. Tada je $\overrightarrow{OA} = \lambda \overrightarrow{OB}$ za neki $\lambda \in \mathbb{R}$. Drugim riječima, postoje realni brojevi t, s, λ takvi da je

$$\begin{aligned} 5t + \frac{7}{2} &= \lambda(s-3), \\ 3t &= \lambda(s-12), \\ t + \frac{5}{2} &= \lambda(s-9). \end{aligned}$$

Vidimo da se λs javlja u sve tri jednadžbe, pa izrazimo λs na tri načina:

$$\begin{aligned} \lambda s &= 5t + 3\lambda + \frac{7}{2} \\ &= 3t + 12\lambda \\ &= t + 9\lambda + \frac{5}{2}. \end{aligned}$$

Dobivamo sustav jednadžbi u varijablama t i λ. Iz prve dvije jednadžbe slijedi $2t = 9\lambda - \frac{7}{2}$. Iz druge i treće slijedi $2t = -3\lambda + \frac{5}{2}$, pa je $\lambda = \frac{1}{2}$ i $t = \frac{1}{2}$.

Točka A je onda jednaka $(6, 3/2, 3)$, pa je traženi pravac $(6t, 3t/2, 3t)$, $t \in \mathbb{R}$. □

Zadatak 5. Odredite sve realne brojeve a takve da pravac zadan implicitno s

$$\begin{cases} x - y + z + 1 = 0 \\ 2x - 3y - z + a = 0 \end{cases}$$

siječe z-os.

Rješenje. Pravac siječe z-os ako i samo ako na njemu postoji točka oblika $(0, 0, z)$. Ta točka onda zadovoljava jednadžbe $z + 1 = 0$ i $-z + a = 0$, što je moguće ako i samo ako je $a = -1$. □

Zadatak 6. Odredite realan broj a takav da je presjek sljedećih ravnina pravac:

$$\pi_1 \dots x - y + z = 0, \quad \pi_2 \dots 3x - y - z + 2 = 0, \quad \pi_3 \dots 4x - y - 2z + a = 0.$$

Rješenje. Presjek ove tri ravnine je skup rješenja nehomogenog linearnog sustava s tri jednadžbe i tri nepoznanice. Pravac je linearna mnogostrukost dimenzije 1.

Skup rješenja sustava je pravac ako i samo ako sustav ima rješenje te pridruženi homogeni sustav ima jednodimenzionalan skup rješenja.

Vidimo da je matrica pridruženog homogenog sustava ova:

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 3 & -1 & -1 \\ 4 & -1 & -1 \end{bmatrix}.$$

Jednostavnim računom vidimo da je matrica ranga 2, pa je skup rješenja pridruženog sustava stvarno jednodimenzionalan. Dakle, preostaje naći a za koji sustav stvarno ima rješenja.

Iz prve jednadžbe slijedi $y = x + z$, a uvrštavanjem u preostale dobivamo $2x - 2z = -2$ i $3x - 3z = -a$, iz čega slijedi $a = 3$.

Lako se uvjeriti da za $a = 3$ sustav stvarno ima rješenje, to je npr. $(0, 1, 1)$. □

Zadatak 7. Odredite pravac p koji je paralelan s ravninama π_1 i π_2 te siječe pravce q_1 i q_2, gdje su:

$$\pi_1 \ldots 3x + 12y - 3z - 5 = 0, \quad \pi_2 \ldots 3x - 4y + 9z + 7 = 0,$$
$$q_1 \ldots \frac{x+5}{2} = \frac{y-3}{-4} = \frac{z+1}{3}, \quad q_2 \ldots \frac{x-3}{-2} = \frac{y+1}{3} = \frac{z-2}{4}.$$

Rješenje. Pravac je paralelan s ravninom ako i samo ako je okomit na njenu normalu. Normala od π_1 je $(1, 4, -1)$ a normala od π_2 je $(3, -4, 9)$.

Slijedi da vektor smjera (v_x, v_y, v_z) od p zadovoljava $v_x + 4v_y - v_z = 0$ i $3v_x - 4v_y + 9v_z = 0$. Ako stavimo $v_x = 1$, dobivamo $v_z = 1 + 4v_y$ i $v_z = \frac{4v_y - 3}{9}$, pa je $v_y = \frac{-3}{8}$ i $v_z = \frac{-1}{2}$, pa za vektor smjera možemo uzeti $(8, -3, -4)$ (uvijek možemo skalirati vektor smjera kako god želimo). Alternativno, mogli smo izračunati vektorski produkt normala od π_1 i π_2.

Neka je A sjecište od p sa q_1 i B sjecište od p sa q_2. Tada je $\overrightarrow{AB} = \lambda \cdot (v_x, v_y, v_z) = (8\lambda, -3\lambda, -4\lambda)$ za neki $\lambda \in$.

Sada možemo nastaviti kao u 4. zadatku. Točku A možemo zapisati preko parametra t, točku B preko parametra s, i onda ćemo dobiti sustav u varijablama s, t, λ, što je linearan sustav s 3 jednadžbe i 3 nepoznanice.

Dobije se rješenje $\lambda = 1$, $t = 1$, $s = -1$. Uvrštavanjem $s = 1$ dobivamo točku $A = (-3, -1, 2)$, pa je pravac zadan parametarski s $(-3, -1, 2) + t \cdot (8, -3, -4)$. □